



TITLE:

# 非線形Volterra方程式に応ずる発展方程式の解の挙動(非線形問題の関数解析的研究)

AUTHOR(S):

小林, 和夫

---

CITATION:

小林, 和夫. 非線形Volterra方程式に応ずる発展方程式の解の挙動(非線形問題の関数解析的研究). 数理解析研究所講究録 1984, 541: 86-99

ISSUE DATE:

1984-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98754>

RIGHT:

# 非線形 Volterra 方程式に於ける発展方程式 の解の挙動

相模工大 小林和夫 (kazu kobayasi)

## §1. 序論

Banach 空間  $X$  での非線形 Volterra 方程式

$$(V) \quad u(t) + \varphi * Au(t) \ni g(t), \quad t \geq 0$$

の解  $u(t)$  の  $t \rightarrow \infty$  における漸近挙動を調べることを目的とする。ここで,  $A$  は  $m$ -accretive 作用素,  $\varphi$  は実数値関数,  $g$  は  $X$ -値関数である。そして,  $\varphi * z(t) = \int_0^t \varphi(t-s)z(s)ds$  とする。

Crandall & Nagel [5] は (V) を次の型の発展方程式 (E) ととらえて, 解の存在と一意性を証明した。

$$(E) \quad \begin{cases} du(t)/dt + Au(t) + G(u)(t) \ni f(t), & t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \in \overline{D(A)} \end{cases}$$

もし  $\varphi(0) = 1$  ならば, (V) を (形式的に) 微分することにより

$$(1.1) \quad \varphi(t) + \varphi * \varphi(t) = 1$$

$$(1.2) \quad f(t) = g'(t) + k * g'(t) + k(t) u_0$$

$$(1.3) \quad G(u)(t) = k(0) u(t) + \int_0^t u(t-s) dk(s)$$

$$(1.4) \quad u_0 = g(0)$$

と  $k, G, u_0$  をおけば (E) が導かれる。

2章では (E) の一般解を定義し, その  $t \rightarrow \infty$  での漸近挙動に関する 数野-小林-宮寺 [7] の結果を紹介する。3章では (V) の解の漸近挙動を2章の結果を用いて調べる。4章では (V) の解の漸近挙動の他の結果を述べる。これは 平野 [6] が Hilbert 空間のとき証明した結果を一様凸 Banach 空間へ拡張するものである。

## §2. (E) に対する漸近挙動

この章では, (E) に対する漸近挙動に関する 数野-小林-宮寺 [7] の結果を証明なしで述べる。

$X$  は実 Banach 空間とする。  $X$  が Opial 条件を満たすとは次が成り立つことである。

$$w\text{-}\lim x_n = x_0 \Rightarrow \liminf_n \|x_n - x\| > \liminf_n \|x_n - x_0\|, \quad \forall x \neq x_0.$$

Hilbert 空間,  $l^p$  空間,  $1 < p < \infty$ , は Opial 条件を満たす。

$G$  は次の条件を満たす与えられた写像とする。

$$(2.1) \quad G: C([0, \infty); X) \rightarrow L^1_{loc}(0, \infty; X)$$

$$(2.2) \quad G: C([0, T]; X) \rightarrow L^1(0, T; X), \quad \forall T > 0$$

$$(2.3) \quad G(u^T) = G(u)^T \quad \text{for } u \in C([0, \infty); X), \quad T > 0$$

$$(2.4) \quad \exists \gamma \in L^1_{loc}(0, \infty) \quad \text{s.t.}$$

$$\|G(u) - G(v)\|_{L^1(0, t; X)} \leq \int_0^t \gamma(s) \|u - v\|_{L^\infty(0, s; X)} ds, \quad t \geq 0$$

$$\text{for } u, v \in C([0, \infty); \overline{D(A)})$$

ここで  $u^T, G(u)^T$  は  $u, G(u)$  の区間  $[0, T]$  への制限とする。

定義 2.1.  $u$  が (E) の強解であるとは,  $u \in W^{1,1}_{loc}(0, \infty; X) \cap C([0, \infty); \overline{D(A)})$ ,  $u(0) = u_0$ ,  $du(t)/dt + Au(t) + G(u)(t) \ni f(t)$  a.e.  $t$  が成り立つことである。

さて,  $f \in L^1_{loc}(0, \infty; X)$  とする。このとき,  $\forall T > 0, \forall u \in C([0, T]; X)$  に対して, (2.2) より次の初期値問題

$$\begin{cases} dv(t)/dt + Av(t) \ni f(t) - G(u)(t), & 0 \leq t \leq T \\ v(0) = u_0 \in \overline{D(A)} \end{cases}$$

は一意的な "integral solution"  $v \in C([0, T]; \overline{D(A)})$  をもつ。これを  $v = Q^T(u)$  と表す。

定義 2.2.  $u$  が (E) の一般解であるとは,  $u \in C([0, \infty); \overline{D(A)})$ ,  $u^T = Q^T(u^T)$ ,  $\forall T > 0$ , が成り立つことである。

このとき, 次の存在定理が成り立つ。

定理 2.1.  $u_0 \in \overline{D(A)}$ ,  $f \in L^1_{loc}(0, \infty; X)$ ,  $G$  は (2.1) - (2.4) を満たすとする。このとき, (E) は一意的な一般解  $u$  をもつ。さらに,  $\lambda > 0$  に対して近似問題

$$(E)_\lambda \quad \begin{cases} du_\lambda(t)/dt + A_\lambda u_\lambda(t) + G(u_\lambda)(t) = f(t), & t \geq 0 \\ u_\lambda(0) = u_0 \end{cases}$$

は一意的強解  $u_\lambda$  をもち,  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \|u_\lambda - u\|_{C([0, T]; X)} = 0, \forall T > 0$  が成り立つ。

定理 2.2.  $u_0 \in D(A), f \in BV_{loc}(0, \infty; X), G$  は (2.1) - (2.4) に加えて次を満たすとする。

$$(2.5) \quad \begin{cases} \forall T > 0, \forall R > 0 \text{ に対して } \exists M > 0 \text{ s.t.} \\ \text{Var}(G(v): [0, t]) \leq M\{1 + \text{Var}(v: [0, t])\}, 0 \leq t \leq T \\ \|G(v)(0+)\| \leq M \\ \text{for } v \in C([0, T]; \overline{D(A)}) \cap BV(0, T; X), \|v\|_{L^\infty(0, T; X)} \leq R \end{cases}$$

このとき, (E) の一般解  $u$  は各有限区間  $[0, T]$  上で Lipschitz 連続である。したがって,  $X$  が回帰的ならば  $u$  は強解である。

## 2.1. 弱漸近挙動

次の条件 (C1) - (C2) をおく。

(C1) i)  $G$  は (2.1) - (2.4) を満たす。

ii) 任意の定数値関数  $v(t) \equiv v \in D(A)$  に対して

$$G(v) \in L^1(0, \infty; X)$$

iii) 非負, 非増加関数  $\rho \in L^1(0, \infty)$  が存在して

$$[G(v)(t) - G(w)(t), v(t) - w(t)]_+ \geq \frac{d}{dt} (\rho * \|v - w\|(t))$$

$$\text{for a.e. } t, \forall v, w \in W_{loc}^{1,1}(0, \infty; X)$$

(ただし,  $[x, y]_+ = \lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda^{-1} (\|x + \lambda y\| - \|x\|)$  とする。)

(C2)  $u_0 \in \overline{D(A)}$ ,  $f \in L^1(0, \infty; X)$

定理 2.3. (C1), (C2) を仮定し,  $X$  は回帰的 で Opial 条件を満たすとする。  $u$  を (E) の一般解 とするとき, 次は互いに同値である。

(a)  $w\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$  が存在する。

(b)  $w\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$  が存在し  $A^{-1}0$  の元である。

(c)  $A^{-1}0 \neq \phi$  かつ  $\omega_w(u) \subset A^{-1}0$

ただし,  $\omega_w(u) = \{z \in X : \exists t_n \uparrow \infty, z = \lim_n u(t_n)\}$

定理 2.4. (C1), (C2) を仮定し,  $X$  は回帰的 で Opial 条件を満たすとする。  $u$  を (E) の一般解 とする。もし  $A^{-1}0 \neq \phi$  かつ  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t+h) - u(t)\| = 0, \forall h > 0$ , ならば,  $w\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = z \in A^{-1}0$

定理 2.5. (C1), (C2) を仮定し,  $X$  は回帰的 で weakly sequentially continuous duality mapping をもつ とする。  $u$  を (E) の一般解 とする。このとき, 次の条件 (d) は上の (a)-(c) と互いに同値である。

(d)  $A^{-1}0 \neq \phi$  かつ  $w\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} \{u(t+h) - u(t)\} = 0, \forall h > 0$ .

## 2.2. 強漸近挙動

(C1), (C2) に加えて次の条件をおく。

$$(C3) \quad G: C([0, \infty); X) \cap L^\infty(0, \infty; X) \rightarrow L^\infty(0, \infty; X)$$

$$(C4) \quad \forall M > 0 \text{ に対して}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \int_0^\infty \|G(v)(t+h) - G(v(\cdot+h))(t)\| dt = 0$$

$$\text{が } v \in C([0, \infty); X) \cap L^\infty(0, \infty; X), \|v\|_{L^\infty(0, \infty; X)} \leq M$$

について一様に成り立つ。

(ここで,  $v(\cdot+h)$  は  $v$  の translation を表わす。)

定理 2.6. (C1)-(C4) を仮定し, ある  $\lambda_0 > 0$  に対して, レゾルベント  $(I + \lambda_0 A)^{-1}$  は compact とする。  $u$  を (E) の一般解とするとき, 次は互いに同値である。

$$(a)' \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) \text{ が存在する。}$$

$$(b)' \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) \text{ が存在して } A^{-1}0 \text{ の元である。}$$

$$(c)' \quad A^{-1}0 \neq \emptyset \text{ かつ } \omega(u) \subset A^{-1}0$$

$$(d)' \quad A^{-1}0 \neq \emptyset \text{ かつ } \lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t+h) - u(t)\| = 0, \forall h > 0$$

ここで,  $\omega(u) = \{ \xi \in X; \exists t_n \uparrow \infty, \lim_n u(t_n) = \xi \}$ 。

§3. (V) に対する漸近挙動, その I

次の条件の下で, (V) の一般解の漸近挙動を調べる。

Baillon & Clément [1] は Hilbert 空間において同じ条件の下で (V) の漸近挙動を研究している。

$$(H1) \quad \varphi \in AC_{loc}[0, \infty), \varphi(0) > 0, \varphi' \in BV_{loc}[0, \infty)$$

$$(H2) \quad g \in W^{1,1}_{loc}(0, \infty; X), g' \in L^1(0, \infty; X), g(0) \in \overline{D(A)}$$

(H3)  $k \in L^1(0, \infty)$ , 非負非増加

ここで,  $k$  は (1.1) で定義された関数である。(H3) は  $k$  が "completely positive" かつ  $k(\infty) > 0$  と同値である。([4])

定義 3.1.  $f(t)$ ,  $G$ ,  $u_0$  を (1.1)-(1.4) で定義されたものとする。このとき,  $u$  が (E) の一般解 (または強解) のとき,  $u$  は (V) の一般解 (または強解) と呼ぶ。

さて, (1.1)-(1.4) で定義された  $f(t)$ ,  $G$ ,  $u_0$  に対して 2章の (C1)-(C4) が満たされることを見る。先づ, (C2), (C3) は明らかである。(C1) は次の補題から従う。

補題 3.1.

$$[G(v)(t), v(t)]_+ \geq \frac{d}{dt} (k * \|v\|(t)) \text{ a.e. } t, v \in W_{loc}^{1,1}(0, \infty; X)$$

証明.  $\pi: 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$  を  $[0, t]$  の分割で,  $t_{R-1} \leq \tau_R \leq t_R$ ,  $|\pi| = \max_R (t_R - t_{R-1})$  とする。 $[\cdot, \cdot]_+$  は上に半連続であるから,  $v \in W_{loc}^{1,1}(0, \infty; X)$  に対して

$$\begin{aligned} & [G(v)(t), v(t)]_+ \\ & \geq \limsup_{|\pi| \rightarrow 0} [k(0)v(t) + \sum_R v(t - \tau_R)(k(t_R) - k(t_{R-1})), v(t)]_+ \\ & \geq k(0)\|v(t)\| - \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sum_R \|v(t - \tau_R)\| |k(t_R) - k(t_{R-1})| \\ & = k(0)\|v(t)\| + \int_0^t \|v(t-s)\| dk(s) = \frac{d}{dt} (k * \|v\|(t)) \end{aligned}$$

(証明終)

次に, (C4) を示すため,  $\Delta_h(v)(t) = G(v)(t+h) - G(v(\cdot+h))(t)$  とおくと



$$\Delta_h(v)(t) = \int_t^{t+h} v(t+h-s) dR(s)$$

であるから

$$\int_0^\infty \|\Delta_h(v)(t)\| dt \leq \|v\|_{L^\infty} \int_0^\infty (R(t) - R(t+h)) dt \leq \|v\|_{L^\infty} R(0)h$$

これより (C4) が成り立つ。したがって、2章の結果より次の定理を得る。

定理 3.2. (H1)-(H3) を仮定し、 $X$  は回帰的で Opial 条件を満たすとする。このとき、(V) の一般解  $u$  に対して定理 2.3, 2.4 の結論が成り立つ。

定理 3.3. (H1)-(H3) を仮定し、 $X$  は回帰的で weakly sequentially continuous duality mapping をもつとする。このとき、(V) の一般解  $u$  に対して、定理 2.5 の結論が成り立つ。

定理 3.4. (H1)-(H3) を仮定し、ある  $\lambda_0 > 0$  に対して、レゾルバント  $(I + \lambda_0 A)^{-1}$  は compact とする。このとき、(V) の一般解  $u$  に対して、定理 2.6 の結論が成り立つ。

#### §4. (V) に対する漸近挙動, その II

この章では、平野 [6] の Hilbert 空間での結果を一樣凸 Banach 空間へ拡張する。次の仮定をおく。

(4.1)  $A$  は一価, strictly  $m$ -accretive

(4.2)  $\varphi \in AC_{loc}[0, \infty)$ ,  $\varphi(0) > 0$ ,  $\varphi' \in BV_{loc}[0, \infty)$

(4.3)  $\varphi' \in L^1(0, \infty) \cap L^{p'}(0, \infty)$ ,  $1/p + 1/p' = 1$ ,  $p \geq 1$

$$(4.4) \quad \vartheta \in L^\infty(0, \infty)$$

$$(4.5) \quad \vartheta \in W_{loc}^{1,1}(0, \infty; X)$$

$$(4.6) \quad \vartheta(0) \in D(A), \quad \vartheta' \in BV_{loc}(0, \infty; X)$$

$$(4.7) \quad \exists z_0 \in X \text{ s.t. } \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^h \| \vartheta'(t+\tau) - z_0 \| d\tau = 0, \quad \forall h > 0$$

(4.2), (4.5), (4.6) を仮定するとき, もし  $f(t)$  が (1.2) によつて定義されているならば  $f(t) \in BV_{loc}(0, \infty; X)$  であり, そして, (1.3) によつて定義された  $G$  は (2.5) を満たす. また, かつ, 定理 2.2 より  $X$  が回帰的ならば (V) は一意な強解をもつ.

定理 4.1.  $X$  を一様凸 Banach 空間とし, (4.1)-(4.7) を仮定する.  $u$  を (V) の強解とし, 次の仮定する.

$$(4.8) \quad \sup_{t \geq 0} \| u(t) \| < \infty$$

$$(4.9) \quad \exists w_0 \in X \text{ s.t. } Au(\cdot) - w_0 \in L^p(0, \infty; X)$$

$$(4.10) \quad \vartheta(0)^{-1} \left( z_0 - \left( \int_0^\infty \vartheta'(s) ds \right) w_0 \right) \in R(A)$$

このとき,  $\frac{1}{t} \int_0^t u(s+h) ds$  は  $t \rightarrow \infty$  のとき,  $A^{-1} \left( z_0 - \left( \int_0^\infty \vartheta'(s) ds \right) w_0 \right)$  の元に  $h > 0$  について一様に弱収束する.

証明では, 一般性を失うことなく  $\vartheta(0) = 1$  と仮定する.

$u$  は (V) の強解であるから

$$\begin{aligned} & \frac{du(t)}{dt} + Au(t) + \left( \int_0^\infty \vartheta'(s) ds \right) w_0 - z_0 \\ &= \vartheta'(t) - z_0 - \int_0^t \vartheta'(t-s) (Au(s) - w_0) ds + \left( \int_t^\infty \vartheta'(s) ds \right) w_0 \end{aligned}$$

ここで

$$Bv = Av + \left(\int_0^\infty \varphi'(s) ds\right) w_0 - z_0, \quad v \in D(B) = D(A)$$

とおくと, (4.1), (4.10) より  $B$  は strictly  $m$ -accretive,  $B^{-1}0 \neq \emptyset$  である。  $\{T(t); t \geq 0\}$  を  $-B$  より生成される非線形縮小半群とする。

補題 4.2.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t+h) - T(h)u(t)\| = 0, \quad \forall h > 0$

証明 integral solution の性質から

$$\begin{aligned} & \|u(t+h) - T(h)u(t)\| \\ & \leq \int_0^h \|\varphi'(t+\xi) - z_0 - \varphi' * (Au - w_0)(t+\xi) + \left(\int_{t+\xi}^\infty \varphi'(s) ds\right) w_0\| d\xi \\ & \leq \int_0^h \|\varphi'(t+\xi) - z_0\| d\xi + \int_0^h \|\varphi' * (Au - w_0)(t+\xi)\| d\xi \\ & \quad + \int_0^h \left\{ \int_{t+\xi}^\infty |\varphi'(s)| ds d\xi \right\} \|w_0\| \\ & = I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

とすると, (4.7) より  $\lim_{t \rightarrow \infty} I_1 = 0$ . (4.3) より  $I_3 \leq h \|w_0\| \int_t^\infty |\varphi'(s)| ds \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$ , そして, (4.3), (4.9) より

$$\|\varphi' * (Au - w_0)\|_{L^p} \leq \|\varphi'\|_{L^1} \|Au - w_0\|_{L^p} < \infty$$

であるから

$$\begin{aligned} I_2 & \leq h^{1/p'} \left( \int_0^h \|\varphi' * (Au - w_0)(t+\xi)\|^p d\xi \right)^{1/p} \\ & = h^{1/p'} \left( \int_t^{t+h} \|\varphi' * (Au - w_0)(\xi)\|^p d\xi \right)^{1/p} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \end{aligned}$$

(証明終)

補題 4.3.  $u$  は asymptotically uniformly

continuous である。i.e.,  $\forall \varepsilon > 0$  に対して,  $\exists \rho > 0$ ,  
 $\exists \delta > 0$  s.t.  $\|u(t) - u(s)\| < \varepsilon$  for  $s, t > \rho, |s - t| < \delta$ .

証明 先づ, 次式が成り立つことに注意しておく。

$$\begin{aligned} & u(t+s) - u(t) \\ &= f(t+s) - f(t) - \int_0^t (\mathcal{B}(t+s-\tau) - \mathcal{B}(t-\tau))(Au(\tau) - w_0) d\tau \\ &\quad - \int_t^{t+s} \mathcal{B}(t+s-\tau)(Au(\tau) - w_0) d\tau - \int_t^{t+s} \mathcal{B}(\tau) w_0 d\tau \end{aligned}$$

とすることで,

$$f(t+s) - f(t) = \int_0^s f'(t+\tau) d\tau = \int_0^s \{f'(t+\tau) - z_0\} d\tau + s z_0$$

であるから (4.7) より

$$(4.11) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \{f(t+s) - f(t)\} = s z_0, \quad s \in [0, 1] \text{ で一様収束}$$

また, (4.3) より  $\mathcal{B}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{B}(t)$  は存在するから

$$(4.12) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+s} \mathcal{B}(\tau) w_0 d\tau = s \mathcal{B}(\infty) w_0, \quad s \in [0, 1] \text{ で一様収束}$$

そして,

$$\begin{aligned} (4.13) \quad & \left\| \int_t^{t+s} \mathcal{B}(t+s-\tau)(Au(\tau) - w_0) d\tau \right\| \\ & \leq \|\mathcal{B}\|_{L^\infty} \int_t^{t+s} \|Au(\tau) - w_0\| d\tau \\ & \leq \|\mathcal{B}\|_{L^\infty} s^{1/p'} \|Au - w_0\|_{L^p}. \end{aligned}$$

さらに,

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t (\mathcal{B}(t+s-\tau) - \mathcal{B}(t-\tau))(Au(\tau) - w_0) d\tau \right\| \\ & \leq \|\mathcal{B}(\cdot + s) - \mathcal{B}\|_{L^{p'}} \|Au - w_0\|_{L^p} \end{aligned}$$

とことが,

$$\|\mathcal{B}(\cdot + s) - \mathcal{B}\|_{L^{p'}}^{p'} = \int_0^\infty |\mathcal{B}(t+s) - \mathcal{B}(t)|^{p'} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \left| \int_0^s \varphi'(t+\tau) d\tau \right|^{p'} dt \leq s^{p'/p} \int_0^\infty \left\{ \int_0^s |\varphi'(t+\tau)|^{p'} d\tau \right\} dt \\
&= s^{p'/p} \int_0^s \left\{ \int_0^\infty |\varphi'(t+\tau)|^{p'} dt \right\} d\tau \\
&\leq s^{p'/p+1} \|\varphi'\|_{L^{p'}}^{p'} = s^{p'} \|\varphi'\|_{L^{p'}}^{p'}
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
(4.14) \quad &\left\| \int_0^t (\varphi(t+s-\tau) - \varphi(t-\tau)) (Au(\tau) - w_0) d\tau \right\| \\
&\leq s \|\varphi'\|_{L^{p'}} \|Au - w_0\|_{L^p}
\end{aligned}$$

したがって, (4.11) - (4.14) と最初に注意した等式を合せると  
 $u$  は asymptotically uniformly continuous であることが  
 分る。 (証終)

補題 4.4. ([2, Lemma 1])  $X$  を一様凸 Banach  
 空間とし,  $u \in L^\infty(0, \infty; X) \cap L^1_{loc}(0, \infty; X)$  は次を満たすと  
 する。

(i)  $u$  は asymptotically uniformly continuous である。

(ii)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t+h) - T(h)u(t)\| = 0, \quad \forall h > 0.$

このとき,  $\frac{1}{T_n} \int_{a_n}^{a_n+T_n} u(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$  ならば,  $z \in B^{-1}0$   
 である。但し,  $\{a_n\}, \{T_n\}$  は  $a_n \uparrow \infty, T_n \uparrow \infty$  なる数列

#### 定理 4.1 の証明

$B$  は strictly accretive である  
 から  $B^{-1}0 = \{z\}$  (singleton) である。  $T_n \uparrow \infty, a_n \uparrow \infty$   
 を任意にとる。補題 4.2 - 4.4 より  $\frac{1}{T_{n_k}} \int_0^{T_{n_k}} u(s + a_{n_k}) ds$   
 $\rightarrow z$  である部分列  $\{n_k\}$  がとれる。ここで, (4.8) を用いた。

したがて,  $\frac{1}{t} \int_0^t u(s+h) ds$  は  $t \rightarrow \infty$  のときに  $h$  について一様に弱収束する。 (証明)

### §5. 例.

X モリーをもつ物質からなる長さ 1 の棒における非線形熱方程式は,  $Au = -a(u_x)_x$  の型の作用素  $A$  をもつ Volterra 方程式に書き表される。( [3] を見よ。 ) いま, (5.1)  $a \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $a'(x) > 0$  for  $x \in \mathbb{R}$ ,  $a(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  を仮定する。このとき, Neumann 境界条件をもつ作用素  $A_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  を次のように定義する。

$$D(A_\infty) = \{u \in C^2[0,1]; u_x(0) = u_x(1) = 0\}$$

$$A_\infty u = -a(u_x)_x \quad \text{for } u \in D(A_\infty)$$

$1 \leq p < \infty$  に対して

$$A_p = A_\infty \text{ の } L^p(0,1) \text{ での閉包}$$

すると  $A_\infty$  は  $C[0,1]$  で,  $A_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , は  $L^p(0,1)$  で  $m$ -accretive となる。また, レゾルベント  $(I + A_\infty)^{-1}$  は  $C[0,1]$  で compact となる。したがて, 3 章の結果を用いることができる。なお, Dirichlet 境界条件  $u(0) = u(1) = 0$  をもつ作用素の場合は, Poincaré の不等式より  $A_p - \omega I$  が accretive いわゆる strongly accretive となるので, 漸近挙動は扱いやすくなる。(  $\omega$  は正数 )

### References

1. J.-B. Baillon & P. Clément, Ergodic theorems for non-linear Volterra equations in Hilbert space, *Nonlinear Analysis*, 5 (1981), 789-801.
2. R.E. Bruck & G.B. Passy, Almost convergence of the infinite product of resolvent in Banach spaces, *Nonlinear Analysis*, 3 (1979), 279-282.
3. Ph. Clément, R.C. MacCamy & J.A. Nohel, Asymptotic properties of solutions of nonlinear abstract Volterra equations, *J. Integral Eq.* 3 (1981), 185-216.
4. Ph. Clément & J.A. Nohel, Asymptotic behavior of solutions of nonlinear Volterra equations with completely positive kernels, *SIAM J. Math. Anal.* 12 (1981), 514-535.
5. M.G. Crandall & J.A. Nohel, An abstract functional differential equations and a related nonlinear Volterra equation, *Israel J. Math.* 29 (1978), 313-328.
6. N. Hirano, Asymptotic behavior of solutions of nonlinear Volterra equations, *J. Diff. Eq.* 47 (1983), 163-179.
7. N. Kato, K. Kobayasi & I. Miyadera, On the asymptotic behavior of solutions of evolution equations associated with nonlinear Volterra equations, preprint